ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ- 1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+1}$

I. Το πεδίο ορισμού της f είναι:

A. $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ B.$(-1,+\infty)$ Γ.$[-1,+\infty)$ Δ.$(-\infty,-1]$ Ε.$(1,+\infty)$

II. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ είναι ίσο με:

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** -1 **Δ.** 1/ 2 **Ε.** Τίποτε από τα προηγούμενα

III. Αν η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-1}{x}, & x\neq 0\\ \alpha^2-1, & x=0\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0 τότε το α παίρνει τις τιμές:

Α. α=1 ή α=-1 **Β.** $\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ **Γ.** α=0 **Δ.** $\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ή $\alpha=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

IV. Η συνάρτηση h(x)=*l*n (f(x)) έχει πεδίο ορισμού:

A.$(-1,+\infty)$ B.$[-1,+\infty)$ Γ.$\mathfrak{R}$ Δ.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ Ε.$(1,+\infty)$

V. Η h΄(x) είναι ίση με:

A. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ B. $\dfrac{1}{2x+2}$ Γ. $\sqrt{x+1}$ Δ. $e^{\sqrt{x+1}}$ Ε. Τίποτε από τα προηγούμενα

VI. Στο σημείο Α(0,h(0)) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h έχει εξίσωση:

Α. 2y+x=0 **Β.**2y-x=0 **Γ.** $y=-\dfrac{1}{3}x$ **Δ.** x+y+1=0

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x},\ x>0 \quad g(x)=e^x(x-1)+1$

Α. Εξετάστε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Δείξτε ότι g(x)>0 για κάθε x>0

Γ. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)=*l*nx-x + 1,4

Α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της Α(e, f(e)).

Γ. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης για τα οποία ισχύει: $B\subseteq A$

α) Να δείξετε ότι P(A-B)=P(A) – P(B)

β) Αν η πιθανότητα P(A) είναι ίση με τη μέγιστη τιμή της f ενώ P(B)=P(A-B) να υπολογίσετε τις πιθανότητες P(A), P(B).

ΘΕΜΑ 4ο

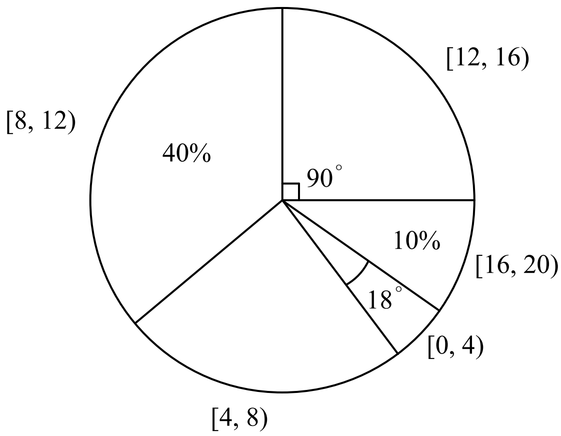
Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζεται η βαθμολογία ενός τμήματος μαθητών στα μαθηματικά

I) να βρεθεί η μέση τιμή της βαθμολογίας.

II) βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμό από 10 ως 14.

III) αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή βρείτε την πιθανότητα να έχει πάρει το πολύ 6.

IV) να εξεταστεί αν το δείγμα έχει ομοιογένεια ως προς την απόδοσή του.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

$f(x)=\sqrt{x+1}$

I. Πρέπει: $x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1$, Σωστό το Γ.

II. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$,

Σωστό το Δ.

III. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-1}{x}, & x\ne 0\\ a^2-1, & x=0\end{cases}$

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$. Είναι $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\dfrac{1}{2}\\ g(0)=a^2-1\end{array}\right\}\Rightarrow a^2-1=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a^2=\dfrac{1}{2}+1\Leftrightarrow a^2=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Σωστό το Δ.

IV. $h(x)=\ln(f(x))=\ln\sqrt{x+1}$ Πρέπει : $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$ Σωστό το Α.

V. $h'(x)=\left(\ln\sqrt{x+1}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x+1}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}(x+1)'=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\dfrac{1}{2x+2}$

Σωστό το Β.

VI. Στο σημείο Α(0,h(0)) η εξίσωση της εφαπτόμενης έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=h΄(0)=1/2 και εξίσωση: $y=\frac{1}{2}x+\beta \quad (1)$ διέρχεται από το Α(0, h(0))

οπότε: Για x=0 $y=h(0)=\ln\sqrt{0+1}=0$

οπότε: $(1) \xrightarrow{x=0,\,y=0} 0=\frac{1}{2}\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=0$

Άρα η εξίσωση: $y=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2y=x \Leftrightarrow 2y-x=0$ Σωστό το Β.

ΘΕΜΑ 2^{o}

$f(x)=\frac{e^x-1}{x},\ x>0 \quad g(x)=e^x(x-1)+1$

Α. Για $x\in\Re$: $g'(x)=\left(e^x(x-1)+1\right)'=e^x(x-1)+e^x=e^x(x-1+1)=e^x\cdot x$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g΄(x)	−	0	+
g(x)	↘		↗

τ. ε.
g(0) = 0

Άρα : στο $(-\infty,0]$ η g γνησίως φθίνουσα, στο $[0,+\infty)$ η g γνησίως αύξουσα , στο $x_o=0$ παρουσιάζει ελάχιστο το g(0)=0.

Β. Αφού η g ↑ στο $[0,+\infty)$ αν $x>0 \Rightarrow g(x)>g(0) \Rightarrow g(x)>0$.

Γ.

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{e^x\cdot x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2} \quad x>0$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Δείξαμε στο Β ότι } g(x)>0 \text{ για κάθε } x>0\\ \text{ακόμα } x^2>0 \text{ για κάθε } x>0\end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}>0 \text{ για κάθε } x>0$$

Άρα η f ↑ στο $(0,+\infty)$

ΘΕΜΑ 3^{o}

f(x)=*l*nx-x+1,4 x>0

Α. f΄ (x)=(*l*nx-x+1,4)΄ = $\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}, \quad x>0$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
f΄(x)	+	0	−
f(x)	↗		↘

τ. μ.
f(1) = 1,4

Άρα : στο $(0,1]$ η f ↑ στο $[1,+\infty)$ η f ↓ στο x_o=1 η f παρουσιάζει μέγιστο το f(1)=0,4.

Β. Στο σημείο Α(e, f(e)) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(e)=\frac{1-e}{e}$

Οπότε έχει εξίσωση: $y=\frac{1-e}{e}x+\beta \quad (1)$

Η εφαπτομένη διέρχεται από το Α(e, f(e)) οπότε: Για x=e

$y=f(e)=\ln e-e+1{,}4 \Rightarrow y=1-e+1{,}4 \Leftrightarrow y=2{,}4-e \quad (1)\xrightarrow{x=e,y=2,4-e} 2{,}4-e=\frac{1-e}{e}\cdot e+\beta \Leftrightarrow$

$2{,}4-e=1-e+\beta \Leftrightarrow \beta=1{,}4$

Άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης: $\boldsymbol{y}=\frac{1-\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{x}+1{,}4$

Γ.

α) $B\subseteq A \Rightarrow B\cap A=B \quad (1)$
οπότε: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B) \quad (1)$

β) είναι P(A)=0,4
P(B)=P(A-B)
Οπότε (1) $\Longrightarrow$ P(B)=0,4-P(B) $\Longrightarrow$ 2P(B)=0,4 $\Longrightarrow$ P(B)=0,2

ΘΕΜΑ 4^ο

κλάσεις	x_i	f_i	$f_i\%$	α_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
0-4	2	0,05	5	18	0,1	4	0,2
4-8	6	0,20	20	72	1,2	36	7,2
8-12	10	0,40	40	144	4	100	40
12-16	14	0,25	25	90	3,5	196	49
16-20	18	0,10	10	36	1,8	324	32,4
Σύνολο		1	100	360	10,6		128,8

I) $\bar{x}=\Sigma x_i\cdot f_i=10{,}6$ II) $\frac{40\%}{2}+\frac{25\%}{2}=32{,}5\%$

III) $5\%+10\%=15\%$ IV) $S^2=\Sigma x_i^2\cdot f_i-(\bar{x})^2=128{,}8-(10{,}6)^2=16{,}44$

Άρα $S=\sqrt{16{,}44}$

Οπότε $Cv=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{16{,}44}}{10{,}6}$

Για να είναι ομοιογενές το δείγμα πρέπει:

$$Cv\le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{16{,}44}}{10{,}6}\le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{16{,}44}{(10{,}6)^2}\le 0{,}01 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow 16{,}44\le 1{,}1236 \text{ άτοπο}$$

Άρα δεν είναι ομοιογενές.

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A: Να δείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(B) - P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

B: Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α «η ένδειξη της πάνω έδρας του πρώτου ζαριού είναι άρτιος αριθμός» και Β «η ένδειξη της πάνω έδρας του δεύτερου ζαριού είναι άρτιος αριθμός». Να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της στήλης Α με τους συμβολισμούς τους στη γλώσσα των συνόλων που βρίσκονται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β
1. Η ένδειξη της πάνω έδρας ενός τουλάχιστον ζαριού είναι άρτιος αριθμός		α. A'
2. Η ένδειξη της πάνω έδρας του πρώτου ζαριού είναι περιττός αριθμός		β. $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$
3. Οι ενδείξεις των πάνω εδρών και των δύο ζαριών είναι άρτιοι αριθμοί		γ. $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$
4. Οι ενδείξεις των πάνω εδρών και των δύο ζαριών είναι περιττοί αριθμοί		δ. $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}'$
5. Η ένδειξη της πάνω έδρας μόνο του δεύτερου ζαριού είναι άρτιος αριθμός		ε. $(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'$
		στ. $\mathrm{B}\cap\mathrm{A}'$

ΘΕΜΑ 2ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 11 - \frac{2}{e^3} + \frac{2\cdot\ln x - 4}{x}$ με x>0

1. Να βρείτε την παράγωγο της f
2. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία της
3. Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της (Δίνεται $e^3 = 20$)

B. Να υπολογισθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{3(x-2)}$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}$

3. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. α. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας και να υπολογισθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση.

Κλάσεις [-)	x_i	f_i	$x_i f_i$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i$
3-5		0,1			
5-7		0,2			
7-9		0,3			
9-11					
Σύνολο		1			

β. Γνωρίζοντας ότι ένα δείγμα είναι ομοιογενές όταν CV$\leq$10%, τότε αν οι τιμές του δείγματος αυξηθούν κατά μία σταθερά c, με c>0, να υπολογισθούν οι τιμές του c ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

γ. Αν $c \in \Omega = \{1,2,3,.......,20\}$ όπου Ω δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: το δείγμα να είναι ομοιογενές και c να είναι άρτιος αριθμός.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Έστω Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} ένας δειγματικός χώρος, ο οποίος αποτελείται από απλά και ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα απλό ενδεχόμενο κ$\in$Ω. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $x^2 + 4x + \kappa = 0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.

Β. Το 10% των μαθητών μιας τάξης ενός σχολείου έχουν τερηδόνα, το 6% έχει ουλίτιδα και το 2% έχει και τα δύο. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή και έστω Α το ενδεχόμενο «ο μαθητής έχει τερηδόνα» και Β το ενδεχόμενο «ο μαθητής έχει ουλίτιδα».

1. Τι εκφράζει το ενδεχόμενο $(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})$ και ποία η πιθανότητα του.

2. Πως συμβολίζεται το ενδεχόμενο «ο μαθητής έχει τουλάχιστον μια ασθένεια» και ποια είναι η πιθανότητα του.
3. Πως συμβολίζεται το ενδεχόμενο «ο μαθητής δεν έχει καμία ασθένεια» και ποια είναι η πιθανότητα του.