ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) 2010

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$

Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}$, $t_2 - \bar{x}$, ..., $t_\nu - \bar{x}$
Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

Α2. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ.

Μονάδες 4

Α3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

β) Για κάθε x>0 ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $υ(t_0)=f'(t_0)$

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in Δ$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}-1 \quad , \qquad x\in\mathbb{R}$$

Β1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Μονάδες 10

Β2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$

Μονάδες 10

Β3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
[0 - ...)	...	20
[... - ...)	6	40
[... - ...)	...	45
[... - ...)	...	30
[... - ...)	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4

Μονάδες 6

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση s

Μονάδες 8

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου
Α: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά».

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2\nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες P(A), P(B) και η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(x-P(A)\right)-\frac{1}{2}\left(x-P(A)\right)^2+P(B)\ ,\quad x>P(A)$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 13

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_o=\frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_o)=0$, να αποδείξετε ότι:

$$P(A)=\frac{2}{3}\quad \text{και}\quad P(B)=\frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα **Δ2** και επιπλέον ότι $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α , Β.

Μονάδες 5

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α , Β.

Μονάδες 5

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. $\overline{x}' = \dfrac{t_1 - \overline{x} + t_2 - \overline{x} + ... + t_\nu - \overline{x}}{\nu} = \dfrac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} - \dfrac{\nu\overline{x}}{\nu} = \overline{x} - \overline{x} = 0$

Α2. Σελ. σχολ. βιβλίου 87

Α3. Σελ. σχολ. βιβλίου 140

Α4. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ ε.Λ

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$

Β1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\left[2\frac{x^2 - x}{(x-1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[2\frac{x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}\right] = \frac{2}{2} = 1$$

Β2. $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

$f'(0) = -1$

Β3. $f'(0) = \varepsilon\varphi\omega$ με $0 \le \omega < \pi \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

ΘΕΜΑ Γ

V=160 κ=5

Γ1.

1^η κλάση [0,α)

2^η κλάση (α,β]

$\alpha - 0 = c \Leftrightarrow \alpha = c$

$\beta - \alpha = c \Leftrightarrow \beta = 2c$ και

$6 = \dfrac{\beta + \alpha}{2} \Leftrightarrow 12 = \beta + \alpha \Leftrightarrow 12 = 3c \Leftrightarrow c = 4$

Γ2.

Απώλεια βάρους σε κιλά	Κέντρο κλάσης xi	Συχνότητα vi	xivi	xi^2	xi^2vi
0-4	2	20	40	4	80
4-8	6	40	240	36	1440
8-12	10	45	450	100	4500
12-16	14	30	420	196	5880
16-20	18	25	450	324	8100
Σύνολο		V=160	1600		20000

$$\overline{x} = \frac{\sum xivi}{v} = \frac{1600}{160} = 10$$

$$S^2 = \frac{1}{160}\left(20.000 - \frac{(1.600)^2}{160}\right) = \frac{20.000}{160} - 100 = 125 - 100 = 25$$

$$S = \sqrt{25} = 5$$

Γ3.

$$CV = \frac{S}{\overline{x}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} > \frac{1}{10} \text{ δεν είναι ομοιογενές.}$$

Γ4. Θεωρούμε ότι το δείγμα σε κάθε διάστημα κατανέμεται ομοιόμορφα.

Στο διάστημα [8-12) $\Rightarrow$ **vi=45**

Το διάστημα [7-8) αντιστοιχεί στο 1/4 του 40 άρα **vi=10**

Το διάστημα [12-14) αντιστοιχεί στο 1/2 του 30 άρα **vi=15**

Οπότε N(A) =45+10+15=70

$$P(A) = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$$

ΘΕΜΑ Δ

$A, B \subseteq \Omega$

$$f(x) = \ln(x - P(A) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), \quad x > P(A)$$

Δ1. $f'(x) = \dfrac{1}{x - P(A)} - x + P(A)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - P(A)} = x - P(A) \Leftrightarrow (x - P(A))^2 = 1 \Leftrightarrow x - P(A) = 1 \Leftrightarrow x = 1 + P(A)$$

$$x - P(A) = -1 \text{ απορ.}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - P(A)} - (x - P(A)) > 0 \Leftrightarrow (x - P(A))^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x - P(A) < 1.$$

P(A)-1<x<1+P $\Leftrightarrow$ P(A)<x<1+P(A)

x	P(A)		1+P(A)		$+\infty$
f΄(x)		+		−	
f(x)		↗		↘	

Μεγ.

$f(1+P(A)) = \ln 1 - \frac{1}{2} + P(B) = P(B) - \frac{1}{2}$

Δ2.

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 + P(A) \\ x_0 = \frac{5}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = P(B) - \frac{1}{2} \\ f(x_0) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

Δ3.

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} P(A \cap B)' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Δ4. $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$