

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α΄) 2011**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Τι ονομάζεται εύρος μιας μεταβλητής;

**Μονάδες 6**

**Α2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η μέση τιμή (μέσος όρος) υπολογίζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές. (Μονάδες 2)

**β)** Αν υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  και είναι  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$  αντίστοιχα, τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$

(Μονάδες 2)

**γ)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , τότε ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x), x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 2)

**δ)** Ισχύει ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x dx = \sigma \nu \beta - \sigma \nu \alpha$  (Μονάδες 2)

**ε)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ . (Μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**A3.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α)  $(\ln x)' = \dots\dots\dots$ , με  $x > 0$  (Μονάδες 3)

β)  $(\eta\mu x)' = \dots\dots\dots$  (Μονάδες 3)

γ) Αν  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $a \in \mathbb{R}$ , τότε  $\int_a^a f(x) dx = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 3)

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, & \text{αν } x < 4 \\ \alpha & \text{αν } x = 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

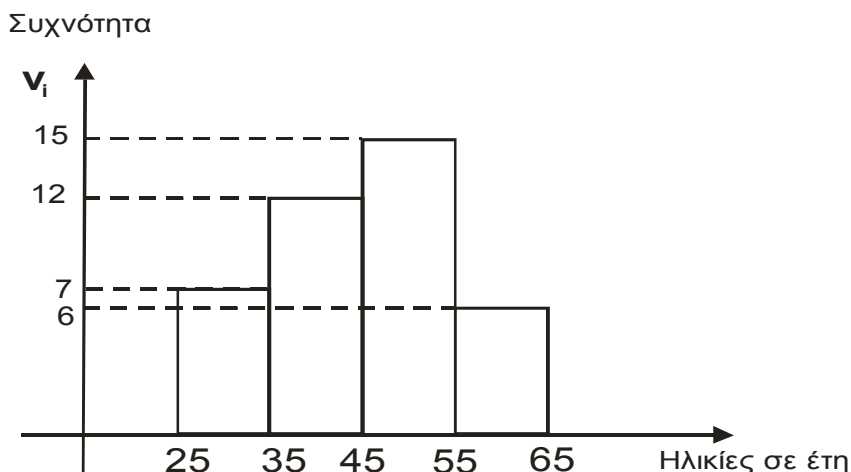
**B1.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$  **Μονάδες 10**

**B2.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$  **Μονάδες 10**

**B3.** Να βρείτε για ποια τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 4$ . **Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα, που αφορά τις ηλικίες 40 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.



**Γ1.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα.

Ηλικίες [ , )	Μέσο διαστήματος K <sub>i</sub>	Συχνότητα v <sub>i</sub>	K <sub>i</sub> ·v <sub>i</sub>	Αθροιστική Συχνότητα N <sub>i</sub>	Σχετική Συχνότητα f <sub>i</sub> %
[25,35)					
[35,45)					
[45,55)					
[55,65)					
<b>Σύνολα</b>					

**Μονάδες 10**

**Γ2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων. **Μονάδες 5**

**Γ3.** Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών; **Μονάδες 5**

**Γ4.** Τί ποσοστό εργαζομένων έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών; **Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 6**

**Δ2.** Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $I = \int_1^3 f'(x) dx$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Αν  $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$  με  $x \in \mathbb{R}$ , να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ , τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x=0$  και  $x=3$ . **Μονάδες 8**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1)** Σχολ. Βιβλίο – σελ. 84 – ορισμός 1

**A2)** α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

**A3)** α)  $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$

β)  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

γ)  $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

**Θέμα Β**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, & x < 4 \\ \alpha, & x = 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3, & x > 4 \end{cases}$$

**B1)**  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\cancel{(x-4)}(x-3)}{\cancel{(x-4)}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-3) = 4-3 = 1$  **(Α)**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - 7x + 12) = 4^2 - 7 \cdot 4 + 12 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 4) = 4 - 4 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Απροσδιόριστη} \\ \text{μορφή } \left(\frac{0}{0}\right) \end{array}$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3) \quad (1)$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Επίσης  $f(4) = \alpha$  **(Β)**

**B2)**  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left( \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} - \lim_{x \rightarrow 4^+} 3 \stackrel{(3)}{=} 4 - 3 = 1$  **(Γ)**

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x}+2) = \sqrt{4} + 2 = 4 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} (x-4) &= 4-4=0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x}-2) &= \sqrt{4}-2=0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Απροσδιόριστη} \\ \text{μορφή } \left(\frac{0}{0}\right) \end{array}$$

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)} = (\sqrt{x}+2) \quad (2)$$

**B3)** Για να είναι η  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 4$  από (Α), (Β), (Γ) θα πρέπει:  $1 = \alpha = 1$  άρα  $\alpha = 1$

### Θέμα Γ

**Γ1)**

Ηλικίες [ , )	Μέσο Διαστήματος $K_i$	Συχνότητα $v_i$	$K_i \cdot v_i$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25 , 35)	30	07	210	07	17,5
[35 , 45)	40	12	480	19	30,0
[45 , 55)	50	15	750	34	37,5
[55 , 65)	60	06	360	40	15,0
Σύνολα		40	1800		100

**Γ2)**  $\bar{x} = \frac{\sum K_i \cdot v_i}{v} = \frac{1800}{40} = 45$

**Γ3)** Οι εργαζόμενοι που έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών είναι:  $v_3 + v_4 = 15 + 6 = 21$

**Γ4)** Οι εργαζόμενοι που έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών είναι :  $v_1 = 07$  οπότε το αντίστοιχο ποσοστό θα είναι :  $\frac{07}{40} \cdot 100\% = 17,5\%$

### Θέμα Δ

**Δ1)**  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 = 3 \text{ ή } x_2 = 1$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

T.M. T.E.

για  $x \in (-\infty, 1)$  η  $f$  ↗

$x \in (1,3)$  η  $f \searrow$

$x \in (3,+\infty)$  η  $f \nearrow$

**Δ2)** Για  $x = 1$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το  $f(1) = 5$  και για  $x = 3$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το  $f(3) = 1$

$$\mathbf{\Delta 3)} \quad I = \int_1^3 f'(x) dx = \int_1^3 (3x^2 - 12x + 9) dx = 3 \int_1^3 x^2 dx - 12 \int_1^3 x dx + 9 \int_1^3 1 dx =$$

$$\cancel{3} \left[ \frac{x^3}{\cancel{3}} \right]_1^3 - \cancel{12} \left[ \frac{x^2}{\cancel{2}} \right]_1^3 + 9[x]_1^3 = (27-1) - 6(9-1) + 9(3-1) = 26 - 48 + 18 = -4$$

$$\mathbf{\Delta 4)} \quad \int_0^3 |g(x)| dx$$

$g(x) = f'(x)$ , από Δ1  $f'(x) > 0$  για  $0 \leq x \leq 1$

και  $f'(x) < 0$  για  $1 \leq x \leq 3$

$$\text{άρα } \int_0^3 |g(x)| dx = \int_0^1 g(x) dx + \int_1^3 -g(x) dx = \int_0^1 (3x^2 - 12x + 9) dx + \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9) dx \stackrel{\Delta 3}{=}$$

$$= [x^3]_0^1 - 6[x^2]_0^1 + [9x]_0^1 + 4 = 1 - 6 + 9 + 4 = 8 \text{ τ.μ.}$$