

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α΄) 2012

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . (Μονάδες 2)

β) Το εύρος ως παράμετρος διασποράς εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής. (Μονάδες 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \text{ με } \alpha < \gamma < \beta. \text{ (Μονάδες 2)}$$

δ) Ισχύει ότι: $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x > 0$ (Μονάδες 2)

ε) Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g' . Τότε ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx \text{ (Μονάδες 2)}$$

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \dots$ με $\beta > \alpha > 0$ (Μονάδες 3)

β) Έστω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους

$g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι:

$$(g \circ f)'(x) = \dots \quad (\text{Μονάδες } 3)$$

$$\gamma) \int_{\alpha}^{\beta} c dx = \dots \quad \text{με } c \text{ σταθερά και } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{Μονάδες } 3)$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ενός ΕΠΑ.Λ.

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$	$x_i v_i$
1	6			
2	5			
3	4			
4	κ			
5	$2\kappa+1$			
Σύνολα	$v=25$		100	

B1. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ **Μονάδες 4**

B2. Για $\kappa=3$ να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα. **Μονάδες 8**

B3. Για $\kappa=3$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} και να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων. **Μονάδες 10**

B4. Για $\kappa=3$ να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως. **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x > 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ **Μονάδες 10**

Γ3. Να υπολογίσετε τα α και β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Δ1. Να βρείτε την παράγουσα F της f , αν $F(0)=1$.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $F(x)=x^3-x^2-x+1$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F .

Μονάδες 8

Δ3. Να συγκρίνετε τις τιμές $F(2011)$ και $F(2012)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

Μονάδες 7

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1) Σχολ. Βιβλίο – σελ. 81

A2) α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

A3) α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \ln \beta - \ln \alpha$

β) $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c \cdot (\beta - \alpha)$

Θέμα Β**B1.**

$$6 + 5 + 4 + \kappa + 2\kappa + 1 = 25 \Leftrightarrow 3\kappa + 16 = 25 \Leftrightarrow 3\kappa = 25 - 16 \Leftrightarrow 3\kappa = 9 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 3}$$

B2.

x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$x_i v_i$
1	6	6	24	6
2	5	11	20	10
3	4	15	16	12
4	3	18	12	12
5	7	25	28	35
ΣΥΝ	$v = 25$		100	75

B3.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{75}{25} = 3$$

Η διάμεσος είναι η 13^η παρατήρηση οπότε, $\delta = 3$

B4.

Το ποσοστό των μαθητών που διαβάζει τουλάχιστον 3 ώρες είναι : $f_3\% + f_4\% + f_5\% = 56\%$

Θέμα Γ**Γ1.**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x^2 + \beta x) = \alpha + \beta$$

Γ2.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3})^2-2^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)}{\cancel{x-1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3}+2) = 4$$

Γ3.

Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4$

Επίσης $f(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4^{(+)} \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 3} \text{ και } \boxed{\beta = 1}$$

Θέμα Δ

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Δ1.

$$F(x) = x^3 - x^2 - x + c$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow 0^3 - 0^2 - 0 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

άρα $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Δ2.

$$F'(x) = f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$F'(x) = f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -\frac{1}{3}$$

	$-\infty$	$-1/3$	1	$+\infty$	
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	↗		↘		↗

T.E. : $F(1) = 0$

T.M.

$$F\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$$

Δ3.

Τα 2011 και 2012 ανήκουν στο διάστημα $[1, +\infty)$ που η F είναι γνησίως αύξουσα. Άρα :

$$2011 < 2012 \Leftrightarrow F(2011) < F(2012)$$

Δ4.

$$E = \int_0^1 |f(x)| dx = -\int_0^1 f(x) dx = -\left[x^3 - x^2 - x\right]_0^1 = -1(1-1-0) = 1$$