ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ ισχύει ότι $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ (μονάδες 2)

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$\big(f(x)\,g(x)\big)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

(μονάδες 2)

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

ε) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\omega_1, \omega_4\} \quad \text{και} \quad B = \{\omega_1, \omega_3\}$$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$

- Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x=1$, όπου

$$f(x) = \frac{x}{3}\ln x, \quad x>0$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1)=\frac{1}{4}$ και $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$ **Μονάδες 10**

Β2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$, όπου A' το συμπληρωματικό του A.

Μονάδες 7

Β3. Αν $P(A')=\frac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P[(A-B)\cup(B-A)]$ και $P(A'\text{-}B')$, όπου B' το συμπληρωματικό του B. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4=85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\delta=75$

  και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}=74$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c=10$ **Μονάδες 4**

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
Σύνολο		

Μονάδες 8

Γ3. Δίνεται ότι $f_1 = 0,1$, $f_2 = 0,3$, $f_3 = 0,2$ και $f_4 = 0,4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$ **Μονάδες 7**

Γ4. Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με $\kappa < \nu$, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x + \kappa$, $x > 0$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$ και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού E, με $E < 2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$ **Μονάδες 5**

Δ2. Έστω $x_1, x_2, ..., x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 31$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 30$ (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, ..., x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$.

Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31 (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ με $\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(e), f'\left(\frac{1}{e}\right)$, όπου $f(x) = x\ln x + 2$

Μονάδες 7

Δ4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega=\left\{t_n,\ n=1,2,3,\ldots,30:\ 0<t_1<t_2<\ldots<t_{10}<\frac{1}{e}<t_{11}<\ldots<t_{30}=1\right\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

A={ $t\in\Omega$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\left(t,f(t)\right)$, να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία },

$B=\left\{\ t\in\Omega:\ f(t)>f'(t)+1\right\}$,

όπου $f(t)=t\ln t+2$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α (μονάδες 3)

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β (μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 28.
Α2. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 14.
Α3. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 87.
Α4. **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}^{\,2}-1^2}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x\cancel{+1}\cancel{-1}}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x\cancel{(x+1)}}{x^2\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-1)\left(\sqrt{(-1)^2-1+1}+1\right)} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x\ln x)' = \frac{1}{3}\left[(x)'\ln x + x(\ln x)'\right] = \frac{1}{3}\left[\ln x + x\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{3}[\ln x + 1]$$

Άρα $f'(x) = \frac{1}{3}[\ln x + 1]$

$$P(\omega_3) = f'(1) = \frac{1}{3}[\ln 1 + 1] = \frac{1}{3}(0+1) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Β2.

- Α΄ Τρόπος : Έστω $\Gamma = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και $\Delta = \{\omega_1\}$

$$P(\Gamma) + P(\Delta) = 1 \Leftrightarrow P(\Gamma) + P(\omega_1) = 1 \Leftrightarrow P(\Gamma) + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow P(\Gamma) = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\Gamma) = \frac{3}{4}$$

$$A' = \{\omega_2, \omega_3\}$$

$$A' \subseteq \Gamma \Rightarrow P(A') \le P(\Gamma) \Rightarrow \boxed{P(A') \le \frac{3}{4}} \quad (1)$$

- Β΄ Τρόπος :

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \left((P\omega_1) + P(\omega_4)\right) = 1 - \frac{1}{4} - P(\omega_4) = \frac{3}{4} - P(\omega_4) \le \frac{3}{4}$$

Έστω $E=\{\omega_3\}$

$$E\subseteq A'\Rightarrow P(E)\le P(A')\Rightarrow P(\omega_3)\le P(A')\Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}\le P(A')}\ (2)$$

Από (1), (2) : $\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$

Β3.

$$P(A')=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)+P(\omega_3)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{5}{12}$$

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{3}+P(\omega_4)=1\Leftrightarrow$$

$$P(\omega_4)=1-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(\omega_4)=0$$

$$P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_4)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=P(\omega_1)+P(\omega_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$$

$$A\cap B=\{\omega_1\}$$

$$P(A\cap B)=P(\omega_1)=\frac{1}{4}$$

$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}-\frac{3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}A'=\{\omega_2,\omega_3\}\\ B'=\{\omega_2,\omega_4\}\end{array}\right\}\Rightarrow A'-B'=\{\omega_3\}\qquad \text{Άρα } P(A'-B')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι κλάσεις είναι $[\alpha,\alpha+c)$, $[\alpha+c,\alpha+2c)$, $[\alpha+2c,\alpha+3c)$, $[\alpha+3c,\alpha+4c)$

$$\alpha=50$$

$$\frac{\alpha+3c+\alpha+4c}{2}=85\Leftrightarrow\frac{50+3c+50+4c}{2}=85\Leftrightarrow\frac{100+7c}{2}=85\Leftrightarrow 100+7c=170\Leftrightarrow$$

$$7c=170-100\Leftrightarrow 7c=70\Leftrightarrow\boxed{c=10}$$

Γ2.

Κλάσεις	x_i	f_i
[50-60)	55	0,1
[60-70)	65	0,3
[70-80)	75	0,2
[80-90)	85	0,4
ΣΥΝ.		1

$f_4=2f_3\qquad f_1+f_2+f_3+f_4=1\Leftrightarrow f_1+f_2+f_3+2f_3=1\Leftrightarrow\boxed{f_1+f_2+3f_3=1}\ (1)$

Η διάμεσος είναι 75 άρα : $f_1+f_2+\frac{\cancel{f_3}}{\cancel{2}}=\frac{\cancel{f_3}}{\cancel{2}}+f_4 \Leftrightarrow f_1+f_2=f_4 \Leftrightarrow \boxed{f_1+f_2=2f_3}\ (2)$

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} 2f_3+3f_3=1 \Rightarrow 5f_3=1 \Rightarrow f_3=\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{f_3=\frac{2}{10}=0,2}$$

$$f_4=2f_3=2\cdot 0,2 \Rightarrow f_4=0,4$$

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{4} x_i f_i \Rightarrow 74=55f_1+65f_2+75\cdot\frac{1}{5}+85\cdot\frac{2}{5} \Leftrightarrow 74=55f_1+65f_2+15+17\cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 74=55f_1+65f_2+15+34 \Leftrightarrow 55f_1+65f_2=74-34-15 \Leftrightarrow 55f_1+65f_2=25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{11f_1+13f_2=5}\ (3)$$

$$(2) \Rightarrow f_1+f_2=2\cdot 0,2 \Leftrightarrow \boxed{f_1+f_2=0,4}\ (4)$$

$$\left.\begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}11f_1+13f_2=5\\ f_1+f_2=0,4\end{matrix}\right\} f_1=0,4-f_2$$

$$11(0,4-f_2)+13f_2=5 \Leftrightarrow 4,4-11f_2+13f_2=5 \Leftrightarrow 2f_2=5-4,4 \Leftrightarrow \boxed{f_2=0,3}$$

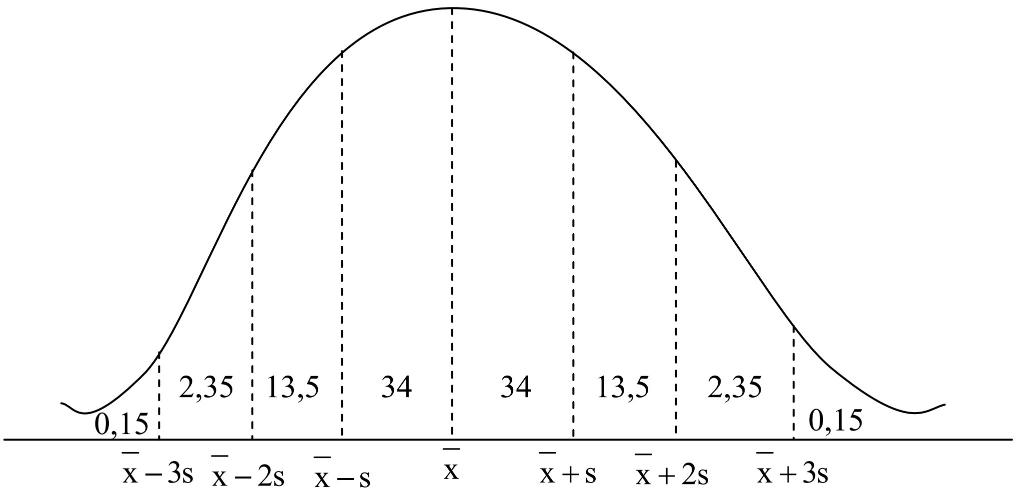
$$f_1=0,4-0,3 \Leftrightarrow \boxed{f_1=0,1}$$

Γ3. Το σύνολο του νέου δείγματος είναι το 60% του προηγούμενου άρα $f_i'=\frac{f_i}{0,6}$

Άρα $f_1'=\frac{0,1}{0,6}=\frac{1}{6}$, $f_2'=\frac{1}{2}$, $f_3'=\frac{1}{3}$

$$\bar{y}=55\cdot\frac{1}{6}+65\cdot\frac{1}{2}+75\cdot\frac{1}{3}=\frac{55+195+150}{6}=\frac{200}{3}$$

Γ4.



Τα $x_i \geq 74$ αντιστοιχούν στο 2,5% άρα $\bar{x}+2s=74$. Τα $x_i \leq 68$ αντιστοιχούν στο 16% άρα $\bar{x}-s=68$

$$\left.\begin{matrix}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}-s=68\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}68+s+2s=74\\ \bar{x}=68+s\end{matrix}\right\} 3s=74-68 \Leftrightarrow 3s=6 \Leftrightarrow \boxed{s=2}$$

$\bar{x}=68+2 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x}=70}$, $\quad CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{2}{70}=\dfrac{1}{35}<\dfrac{1}{10}$, άρα το δείγμα είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f'(x)=\ln x+1$

$f'(1)=1$

$f(1)=\kappa$

$(\varepsilon\varphi): y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$y-\kappa=x-1 \Leftrightarrow y=x-1+\kappa$

$x'x \quad : y=0 \Rightarrow x=1-\kappa \quad \to A(1-\kappa,0)$

$y'y: \quad x=0 \Rightarrow y=\kappa-1 \quad \to B(0,\kappa-1)$

$$E=\frac{1}{2}|1-\kappa|\cdot|\kappa-1| \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\kappa-1)^2<2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2<4 \Leftrightarrow -2<\kappa-1<2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-1<\kappa<3\\ \kappa>1,\ \kappa\in Z\end{matrix}\right\}\Rightarrow \kappa=2$$

Δ2.

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_5$

$\bar{y}=31$

(α) Για $\kappa=2 \quad (\varepsilon\varphi): y=x+1$ δηλαδή $y_i=x_i+1 \Rightarrow \bar{y}=\bar{x}+1 \Rightarrow 31=\bar{x}+1 \Leftrightarrow \bar{x}=30$

(β) $$\bar{x}'=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i+3)+\sum_{i=21}^{35}x_i+\sum_{i=36}^{50}(x_i-\lambda)}{50} \Leftrightarrow \bar{x}'=\frac{\sum_{i=1}^{20}x_i+3\cdot 20+\sum_{i=21}^{35}x_i+\sum_{i=36}^{50}x_i-15\lambda}{50} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x}'=\frac{\sum_{i=1}^{50}xi+60-15\lambda}{50} \Leftrightarrow 31=\frac{\sum_{i=1}^{50}xi}{50}+\frac{6}{5}-\frac{15\lambda}{50} \Leftrightarrow 31=\bar{x}+\frac{6}{5}-\frac{15\lambda}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31=30+\frac{6}{5}-\frac{15\lambda}{50} \Leftrightarrow \frac{15\lambda}{50}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \lambda=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}$$

Δ3.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Για $x\in\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$ έχουμε f γνησίως αύξουσα άρα

$$\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$$

Ξέρουμε ότι:

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)=0 \text{ και } f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}+2=\frac{2e-1}{e}>0$$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2e-1}{e}>0$ άρα

$$f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)>0 \text{ οπότε}$$

$$0=f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)=e+2$$

οπότε: $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2$

$$\overline{y}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}=\frac{\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e+2}{5}=$$

$$\frac{\ln\left(\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}\right)+8+e}{5}=\frac{\ln e^{7}+8+e}{5}=\frac{15+e}{5}=3+\frac{e}{5}$$

Δ4. Πρέπει $f'(t)=\varepsilon\varphi\omega>0\Leftrightarrow f'(t)>0\Leftrightarrow t>\frac{1}{e}$

Άρα $A=\{t_{11},\ldots,t_{30}=1\}$

$f(t)>f'(t)+1\Leftrightarrow t\ln t+2>\ln t+2\Leftrightarrow \ln t(t-1)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t\neq 1, t>0)$

	0		1		$+\infty$
$\ln t$		$-$	0	$+$	
$t-1$		$-$	0	$+$	
		$+$	0	$+$	

άρα $B=\{t_1,t_2\ldots,t_{29}\}$

(α) $P(A)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

(β) $A\cap B=\{t_{11},\ldots,t_{29}\}$

$$P(A\cap B)=\frac{19}{30}$$