

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΤΟΥΣ 2008
(ΠΡΟΚΗΡΥΞΗ 2Π/2008)
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

Κλάδος: **ΠΕ 03 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ **ΠΡΩΤΗ** ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ
(**Γνωστικό αντικείμενο**)
Σάββατο 31-1-2009

A

Να απαντήσετε στα επόμενα δύο (2) ισοδύναμα **ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ**. Να αναπτύξετε τις απαντήσεις σας στο ειδικό **ΤΕΤΡΑΔΙΟ**. Κάθε ερώτημα συμμετέχει κατά **25 %** στη διαμόρφωση της βαθμολογίας της πρώτης θεματικής ενότητας.

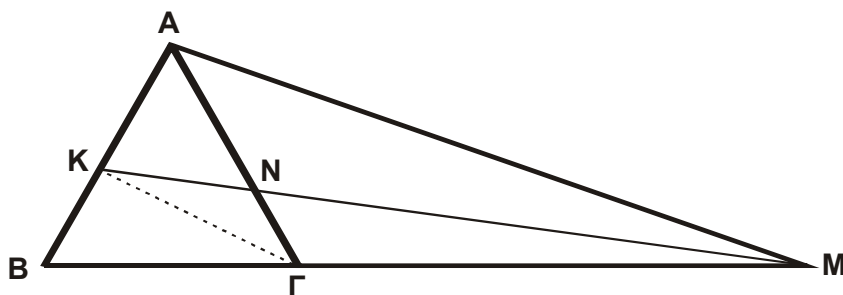
ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο:

α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \eta\mu \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

- i. Βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και εξετάστε αν η $f'(x)$ είναι συνάρτηση συνεχής στο σημείο $x = 0$.
- ii. Για κάθε $\varepsilon > 0$ να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

β) Έστω ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά μήκους a . Δύο σημεία K και N βρίσκονται αντίστοιχα πάνω στις πλευρές AB και $A\Gamma$ έτσι ώστε η ευθεία KN να τέμνει την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο M (βλ. σχήμα). Αν τα τρίγωνα AKN , $N\Gamma M$ και το τετράπλευρο $KB\Gamma N$ έχουν το ίδιο εμβαδόν, τότε:

- i. αποδείξτε ότι η $K\Gamma$ είναι παράλληλη προς την AM .
- ii. υπολογίστε το μήκος των AK , AN και ΓM συναρτήσει του a .



γ) Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$ και $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε: $A\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}$ και $A\vec{y} = \lambda_2 \vec{y}$, να αποδείξετε ότι τα \vec{x} και \vec{y} είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο:

α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^a$, $0 < x < 1$ και $a > 1$.

i. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα $(0, 1)$.

ii. Αποδείξτε ότι για όλα τα $x, y \in (0, 1)$ και $a > 1$ ισχύει $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

iii. Αποδείξτε ότι, αν $x > 0$, $y > 0$, $a > 1$ και $x + y = 1$, τότε ισχύει:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^a + \left(y + \frac{1}{y}\right)^a \geq \frac{5^a}{2^{a-1}}$$

β) Οι τέσσερις τιμές ενός στατιστικού δείγματος είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $s = \sqrt{5}$. Προσδιορίστε τις τιμές αυτές (ο τύπος της διακύμανσης ή διασποράς ορίζεται από τη σχέση $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2$).

γ) Τρεις πόλεις Α, Β, Γ βρίσκονται κατά μήκος ενός αυτοκινητοδρόμου με αποστάσεις $AB=200$ km, $ΒΓ=400$ km (και $ΑΓ=600$ km). Ένα αυτοκίνητο κινούμενο συνεχώς ξεκινά από την πόλη Α, περνάει από την πόλη Β μετά από 3 ώρες και φθάνει στην πόλη Γ σε 6 ώρες. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά 3 ώρες, έτσι ώστε το αυτοκίνητο τη μία χρονική στιγμή είχε διπλάσια ταχύτητα απ' ό,τι την άλλη (η συνάρτηση που εκφράζει το διάστημα συναρτήσει του χρόνου είναι συνεχής και παραγωγίσιμη).

B

Τα επόμενα δύο **ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ** (3^ο και 4^ο) αποτελούνται το καθένα από έξι (6) ισοδύναμες ερωτήσεις. Να απαντήσετε στις ερωτήσεις αυτές με τη μέθοδο των πολλαπλών επιλογών στο ειδικό **ΑΠΑΝΤΗΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ**.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο:

▪ Το ερώτημα συμμετέχει κατά **25 %** στη διαμόρφωση της βαθμολογίας της πρώτης θεματικής ενότητας. Επομένως, κάθε ερώτηση συμμετέχει με $4 \frac{1}{6}$ μονάδες στο βαθμό της πρώτης θεματικής ενότητας.

1. Το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις δύο τεθλασμένες γραμμές $y = |x - 1|$ και $y = 3 - |x|$ ισούται με:
- α) 3.
β) 4.
γ) 5.
δ) 6.

2. Σε μια σφαίρα είναι εγγεγραμμένος ένας ορθός κώνος ο όγκος του οποίου ισούται με το $\frac{1}{4}$ του όγκου της σφαίρας. Αν το ύψος του κώνου h είναι διάφορον της ακτίνας της σφαίρας, τότε ο όγκος της σφαίρας ισούται με:

α) $\frac{4}{3}\pi\sqrt{5}h^3$

β) $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{5}-1)h^3$

γ) $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{5}-2)h^3$

δ) $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{5}-3)h^3$

3. Η τιμή της παράστασης $K = \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^4 + \left(\sin\frac{3\pi}{8}\right)^4$ ισούται με:

α) $\frac{1}{2}$

β) $\frac{2}{5}$

γ) $\frac{3}{4}$

δ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Αν οι συντελεστές του 2^{0u} , 3^{0u} και 4^{0u} όρου του διωνυμικού αναπτύγματος $(x+y)^n$ αποτελούν με τη σειρά αυτή διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, τότε ο φυσικός αριθμός n ισούται με:

α) 6

β) 7

γ) 9

δ) 10

5. Αν $a > 0$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{-a}^a |x(x-a)(x-2a)(x-3a)| dx$ ισούται με:

α) $7a^5$

β) $8a^5$

γ) $9a^5$

δ) $10a^5$

6. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=2x+1$ και το σημείο $A(2,1)$. Οι συντεταγμένες του συμμετρικού τού σημείου A ως προς την ευθεία (ε) είναι ίσες με:

α) $x = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{12}{7}$

β) $x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{3}{5}$

γ) $x = -\frac{8}{7}, \quad y = \frac{15}{4}$

δ) $x = -\frac{6}{5}, \quad y = \frac{13}{5}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 4ο:

- Το ερώτημα συμμετέχει κατά **25%** στη διαμόρφωση της βαθμολογίας της πρώτης θεματικής ενότητας. Επομένως, κάθε ερώτηση συμμετέχει με **$4\frac{1}{6}$ μονάδες** στο βαθμό της πρώτης θεματικής ενότητας.

7. Σε ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών υπάρχουν προς πώληση 600 ηλεκτρικοί λαμπτήρες. Από αυτούς οι 200 κατασκευάστηκαν στο εργοστάσιο Α, 250 στο εργοστάσιο Β και 150 στο εργοστάσιο Γ. Αν είναι γνωστό ότι η πιθανότητα ένας λαμπτήρας να μην είναι ελαττωματικός είναι 0,93, 0,96, και 0,88 αντίστοιχα για τα εργοστάσια Α, Β και Γ, τότε η πιθανότητα να πωληθεί ένας λαμπτήρας από τους 600 μη ελαττωματικός ισούται με:

α) 0,92.

β) 0,93.

γ) 0,94.

δ) 0,95.

8. Το διάστημα των τιμών $x \in \mathbb{R}$ που επαληθεύουν την ανίσωση $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) \leq 1$ είναι το:

α) $(3, 4]$

β) $[4, 5]$

γ) $[5, 8]$

δ) $[6, 10]$

9. Αν $0 < a < \frac{\pi}{2}$, τότε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2^2} \sin \frac{a}{2^3} \dots \sin \frac{a}{2^n} \right)$ ισούται με:

α) $\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}$

β) $\frac{\sigma\upsilon\alpha}{\alpha}$

γ) $\frac{\alpha}{\eta\mu\alpha}$

δ) α

10. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας, τότε η τιμή της παράστασης

$$K = (1 + \rho_1)^{3000} + (1 + \rho_2)^{3000} \text{ ισούται με:}$$

- α) -1 .
 - β) 1 .
 - γ) 2 .
 - δ) 4 .
-

11. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ και ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ της υπερβολής με $x_0 > 1$.

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής και τις παράλληλες από το σημείο M προς τις ασύμπτωτες ισούται με:

- α) $\frac{1}{2}$
 - β) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - γ) 1
 - δ) $\frac{4}{3}$
-

12. Μεταξύ όλων των κυλινδρικών δοχείων με όγκο $V \text{ cm}^3$, το ύψος εκείνου που έχει την ελάχιστη ολική επιφάνεια ισούται με:

- α) $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$
 - β) $\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$
 - γ) $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$
 - δ) $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$
-