

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) 2011**

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:
 $P(A-B)=P(A) - P(A \cap B)$. **Μονάδες 7**
- A2.** Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα; **Μονάδες 4**
- A3.** Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος. **Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. **Μονάδες 2**
- β)** Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R=6\bar{x}$. **Μονάδες 2**
- γ)** Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))'=f'(g(x)) \cdot g'(x)$ **Μονάδες 2**
- δ)** Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα. **Μονάδες 2**
- ε)** Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη

είναι $P(M)=\frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A)=4\lambda^2$

και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K)=-5\lambda+\frac{7}{4}$, όπου

$\lambda \in \mathbb{R}$. Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64 < N(\Omega) < 72$, τότε

B1. Να δείξετε ότι $N(\Omega)=68$ **Μονάδες 6**

B2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ **Μονάδες 8**

B3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί. **Μονάδες 6**

B4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις:

A(8, 0) B(10, 10) Γ(12, 20) Δ(14, y_Δ)

E(16, y_E) Z(18, 10) H(20, 0)

όπου y_Δ, y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.

Γ1. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα **Μονάδες 7**

Γ2. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$. **Μονάδες 3**

Γ3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους. **Μονάδες 7**

Γ4. Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό. **Μονάδες 4**

Γ5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα. **Μονάδες 4**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία. **Μονάδες 8**

Δ2. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και $P(A), P(B)$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B), P(A - B), P(A \cup B), P(B - A)$.

Μονάδες 8

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = h(x)$. **Μονάδες 3**

β) Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i = 2x_i + 1, \quad i = 1, 2, 3$ οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων. **Μονάδες 6**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α****A1.** Απόδειξη - Σελ. σχολ. βιβλίου 152**A2.** Σελ. σχολ. βιβλίου 142**A3.** Εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων x_i **A4.** α. Λ

β. Λ

γ. Σ

δ. Λ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β**B1.** $N(\Omega) = 4N(M) \Rightarrow N(\Omega)$ είναι πολλαπλάσιο του 4 άρα το μόνο $N(\Omega) = 68$ **B2.**

$$P(M) + P(K) + P(A) = 1$$

$$\frac{1}{4} + 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$\lambda = \frac{5 \pm 3}{8} \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ απορ. διότι } P(A) = 4 > 1 \\ \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

B3.

$$P(M) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{N(M)}{68} \Leftrightarrow N(M) = 17$$

$$P(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(A) = 17$$

$$P(K) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N(K)}{68} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow N(K) = 34$$

B4.

$$P(K') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

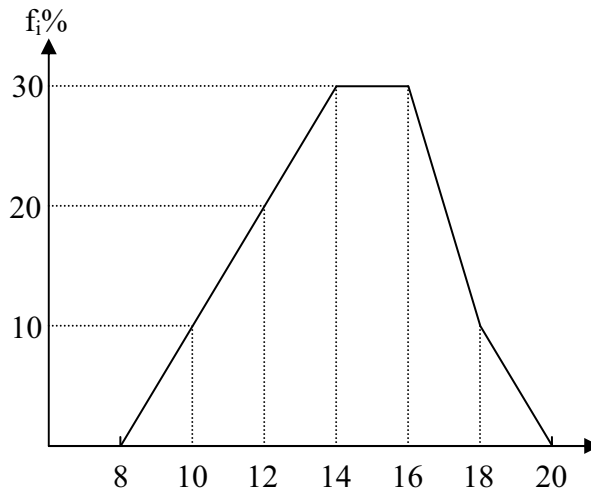
ΘΕΜΑ Γ**Γ1.**Εφόσον το ΔE είναι παράλληλο στον οριζόντιο άξονα τότε $y_\Delta = y_E = y$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 14y + 16y + 18 \cdot 0,1$$

$$14,2 = 5,2 + 30y \Leftrightarrow 30y = 9 \Leftrightarrow y = \frac{9}{30} \Leftrightarrow y = 0,3$$

Άρα $y_{\Delta} = y_E = 30\%$

Γ2.



Γ3.

Τα σημεία $A(8,0)$ και $H(20,0)$ αντιστοιχούν σε υποθετικές κλάσεις άρα δεν υπάρχουν στον πίνακα.

Οι τεταγμένες των σημείων B, Γ, Δ, E, Z είναι τα κέντρα x_i των κλάσεων με $x_{i+1} - x_i = c$. Έστω α το κέντρο της πρώτης κλάσης και c το πλάτος των κλάσεων.

Η 1^η κλάση θα είναι της μορφής $[\alpha, \alpha + c)$ δηλαδή $\frac{\alpha + \alpha + c}{2} = 10 \Leftrightarrow 2\alpha + c = 20$

$$x_2 - x_1 = c \Leftrightarrow c = 2$$

$$2\alpha + 2 = 20 \Leftrightarrow \alpha = 9$$

| $[\ ,)$ | X_i | $f_i\%$ |
|----------|-------|---------|
| 9 – 11 | 10 | 10 |
| 11 – 13 | 12 | 20 |
| 13 – 15 | 14 | 30 |
| 15 – 17 | 16 | 30 |
| 17 – 19 | 18 | 10 |
| | | 100 |

Γ4. $x \geq 15$ άρα $30\% + 10\% = 40\%$

Γ5. Το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων με τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το σύνολο n του δείγματος άρα $n = 80$. Επομένως $0,4 \cdot 80 = 32$

ΘΕΜΑ Δ

$A, B \subseteq \Omega$

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{x^3}{3} - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}$$

$$\Delta 1. f'(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right)$$

$$x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0$$

$$\Delta = 121 - 120 = 1$$

$$x = \frac{11 \pm 1}{30} = \begin{cases} \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \\ \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

| | | | | | |
|---------|-----------|-------|-------|-----------|---|
| | $-\infty$ | $1/3$ | $2/5$ | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

Δ2.

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \quad P(A - B) = 0$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

Δ3.

$$(\alpha) e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)} = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή}$$

$$3\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) = 5\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{9x^2}{2} - 3x - 1 = 5x^2 - \frac{11}{2}x + 2$$

$$9x^2 - 6x - 2 = 10x^2 - 11x + 4$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} \rightarrow 2 \\ \rightarrow 3 \end{cases}$$

$$(\beta) x_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 1$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow v_2 = 5$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow v_3 = 7$$

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{13} = \frac{31}{13}$$