ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x),\ x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 7**

Α2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α **Μονάδες 4**

Α3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x}>0$ και πώς, αν $\bar{x}<0$; **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

β) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x, όταν $x=x_0$ (μονάδες 2).

γ) Αν Α,Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$, τότε ισχύει ότι $P(A)>P(B)$ (μονάδες 2).

δ) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).

ε) $\lim\limits_{x\to x_0} ημx = ημx_0,\ x_0\in\mathbb{R}$ (μονάδες 2). **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5,45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

Β1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

Β2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι α=8 (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5, ·)		α+4			
[· , ·)		3α-6			
[· , ·)		2α+8			
[· , 45)		α-2			
Σύνολο					

Μονάδες 8

Β3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$)

Μονάδες 8

Β4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$
- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο. **Μονάδες 7**

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\nu = 3$ **Μονάδες 6**

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες. **Μονάδες 6**

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. **Μονάδες 5**

Δ2. Έστω $M(x,f(x))$, $x>0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x,0)$ και η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0,f(x))$. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. **Μονάδες 7**

Δ3. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$, $\beta\neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1,f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i,y_i), i=1,2,…,10 της ευθείας ε, τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A\neq\varnothing$ και $A\cap B\neq\varnothing$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f\big(P(A)\big)+f\big(P(A\cap B)\big)\geq 2f\big(P(A\cup B)\big)$$

Μονάδες 5

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα σελ. 253
Α2. Ορισμός σελ. 191
Α3. Ορισμός σελ. 258
Α4. Σ, Σ, Λ, Λ, Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1..

$$(z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow z\overline{z}\cancel{-z}\cancel{-\overline{z}}+1+z\overline{z}\cancel{+z}\cancel{+\overline{z}}=4 \Leftrightarrow$$

$$2z\overline{z}+2=4 \Leftrightarrow z\overline{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Β2.

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+|z_2|^2=2 \xleftrightarrow{|z_1|=|z_2|=1} z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=0$$

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+|z_2|^2=$$

$$\underset{z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=0}{\overset{|z_1|=|z_2|=1}{=}} 1+1=2$$

Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

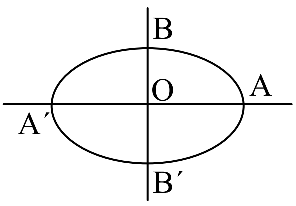
Β3.

Έστω $\omega=x+yi$

$$|\omega-5\overline{\omega}|=12 \Leftrightarrow |x+yi-5(x-yi)|=12 \Leftrightarrow |-4x+6yi|=12 \Leftrightarrow \sqrt{16x^2+36y^2}=12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{144}+\frac{36y^2}{144}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των ω είναι έλλειψη με $\alpha=3$ και $\beta=2$



Η ελάχιστη τιμή του $|\omega|$ θα είναι ίση με το (ΟΒ) και η μέγιστη με το (ΟΑ)

$$(OB)=\frac{(BB')}{2}=\beta=2 \text{ και } (OA)=\frac{(AA')}{2}=\alpha=3 \text{ άρα}$$

$$\boxed{2\le|\omega|\le 3}$$

Β4.

$$\big||z|-2\big|\le\big||z|-|\omega|\big|\le|z-\omega|\le|z|+|\omega|\le|z|+3$$

$$\big||z|-2\big|=|1-2|=1$$

$$|z|+3=1+3=4$$

Άρα $\boxed{1\le|z-\omega|\le 4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f(x)=(x-1)\ln x-1,\ x>0$

$f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$

Για $x=1$ έχουμε ότι $f'(1)=0$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και έχει την $x=1$ μοναδική ρίζα. Οπότε :

$x<1\Leftrightarrow f'(x)<f'(1)=0\Leftrightarrow f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

$x>1\Leftrightarrow f'(x)>f'(1)=0\Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Δηλαδή

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Για $x\in(0,1]$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(A_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

και $f(1)=-1$ άρα $f(A_1)=[-1,+\infty)$

για $x\in[1,+\infty)$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(A_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Άρα $f(A_2)=[-1,+\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι :

$f(A_1)\cup f(A_2)=[-1,+\infty)$

Γ2.

$x^{x-1}=e^{2013}\Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013}\Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013\Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=2012$

Για $x\in(0,1]$ το $f(A_1)=[-1,+\infty)$, δηλαδή $2012\in f(A_1)$ άρα υπάρχει μοναδικό $(f\searrow)$ $x_1\in(0,1):f(x_1)=2012$

Για $x\in[1,+\infty)$ το $f(A_2)=[-1,+\infty)$, δηλαδή $2012\in f(A_2)$ άρα υπάρχει μοναδικό $(f\nearrow)$ $x_2\in(1,+\infty):f(x_2)=2012$

Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς θετικές ρίζες

Γ3.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^x\left(f(x)-2012\right)$

Η g είναι συνεχής στο (x_1,x_2) με $g'(x)=\left(f'(x)+f(x)-2012\right)e^x$

$$\left.\begin{array}{l} g(x_1)=e^{x_1}\left(f(x_1)-2012\right)=e^{x_1}\cdot 0=0 \\ g(x_2)=e^{x_2}\left(f(x_2)-2012\right)=e^{x_2}\cdot 0=0 \end{array}\right\}\Rightarrow g(x_1)=g(x_2)$$

Άρα ισχύει το Θ. Rolle, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1,x_2): g'(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x_0}\left(f'(x_0)+f(x_0)-2012\right)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$

Γ4.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=-1$ άρα $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x>0$ δηλαδή $f(x)+1\geq f(1)+1 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$ για $x>0$ $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=-1 \Leftrightarrow x=1$

Άρα $E(\Omega)=\int_1^e |g(x)|dx=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x dx=$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx=$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-e-\left[\frac{e^2}{4}-e-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right]=$$

$$\frac{e^2}{2}\cancel{-e}-\frac{e^2}{4}\cancel{+e}-1+\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}\geq 0$$

Έστω $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}$

Δηλαδή $g(x)\geq 0$ για $x>0$

για $x=1\Rightarrow g(1)=0$ άρα $g(x)\geq g(1)$ για $x>0$ δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$.

Το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$. Η f είναι συνεχής άρα η συνάρτηση $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, η g είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Από Θεώρημα Fermat : $g'(1)=0$

$$g'(x)=f\left(x^2-x+1\right)\cdot(2x-1)-\frac{1-2x}{e}$$

$$g'(1)=0\Leftrightarrow f(1)+\frac{1}{e}=0\Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}<0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1)=-\frac{1}{e}<0$, θα ισχύει $f(x)<0$ gia $x\in(0,+\infty)$ δηλαδή $|f(x)|=-f(x)$

Άρα $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x)$

Η f συνεχής άρα $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών, άρα $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt$ παραγωγίσιμη, άρα η f παραγωγίσιμη.

$$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x - x}{f(x)} = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)$$

Θέτω $h(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)}$ για $x > 0$, άρα $h(x) = \int_1^x h(t)dt + e$

$h'(x) = h(x)$ άρα $h(x) = c\cdot e^x$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } x = 1 \Rightarrow h(1) = e \\ \text{και } h(1) = c\cdot e \end{array}\right\} \Rightarrow c = 1$$

Δηλαδή $h(x) = e^x \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x}}$

Δ2.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$$

Θέτουμε $\frac{1}{f(x)} = u$ άρα $\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{\ln x - x} = 0$

$$\lim_{u\to 0}\left[\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u}\right] = \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} \underset{(D.H.)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} \underset{(D.H.)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{-\eta\mu u}{2} = 0$$

Δ3.

Η f συνεχής άρα $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt,\ x > 0$ παραγωγίσημη.

$F'(x) = f(x) < 0$ Η F' παραγωγίσημη αφού f παραγωγίσημη .

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x - (\ln x - x)e^x}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x + x - 1}{e^x}$$

Επειδή $\ln x \le x - 1 \Leftrightarrow (x-1) - \ln x \ge 0$ και $\frac{1}{x} > 0$ άρα $F''(x) > 0$ δηλαδή η F είναι κυρτή.

F συνεχής στο $[x, 2x]$

F παραγωγίσιμη στο $(x, 2x)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x, 2x)$: $F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$

F συνεχής στο $[2x, 3x]$

F παραγωγίσιμη στο $(2x, 3x)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2x, 3x)$: $F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$

F κυρτή άρα F΄ είναι γνησίως αύξουσα. Ισχύει ότι : $x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$ άρα

$$F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2x)-F(x)}{\cancel{x}} < \frac{F(3x)-F(2x)}{\cancel{x}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2F(2x) < F(3x)+F(x)$$

Δ4.

Θέτω $g(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)$

g συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$

$g(\beta)=2F(\beta)-F(\beta)-F(3\beta)=F(\beta)-F(3\beta)$

$\beta > 0$ άρα $\beta < 3\beta$ και $F''(x)=f(x)<0$ δηλαδή F γνησίως φθίνουσα

$F(\beta) > F(3\beta)$ άρα $g(\beta) > 0$

$g(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta) \overset{\Delta 3}{\Leftrightarrow} g(2\beta) < 0$ άρα $g(\beta)\cdot g(2\beta) < 0$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta): g(\xi)=0 \Leftrightarrow 2F(\xi)=F(\beta)+F(3\beta)$

$g'(x)=2F'(x)<0$ για $x>0$, άρα g΄ γνησίως φθίνουσα, άρα ξ μοναδικό.