

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΤΟΥΣ 2005

ΚΛΑΔΟΣ ΠΕ 03 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ
«Γνωστικό Αντικείμενο»

Σάββατο 2-4-2005

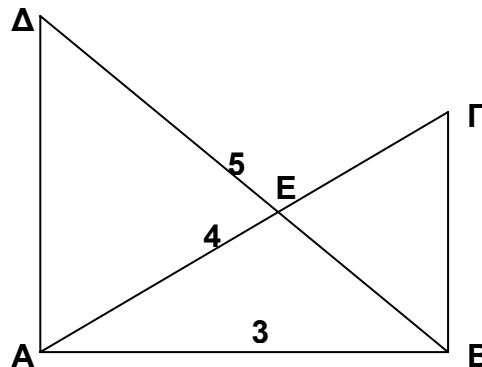
Να απαντήσετε στα επόμενα τέσσερα (4) ισοδύναμα ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

ΕΡΩΤΗΜΑ 1^ο :

- α) Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$.
- β) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 3^{-10}$. Να δείξετε ότι υπάρχει θετικός αριθμός α τέτοιος ώστε για κάθε $x \in (2 - \alpha, 2 + \alpha)$ η $f(x)$ είναι θετική.
- γ) Να βρεθούν οι τιμές του $m \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ να έχει 4 πραγματικές ρίζες οι οποίες να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2^ο:

- α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες (παραγοντική ολοκλήρωση) στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
- β) Στο παρακάτω σχήμα οι ΑΔ και ΒΓ είναι κάθετες στην ΑΒ, και ΑΒ=3, ΑΓ=4, ΒΔ=5. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Ε από την ευθεία ΑΒ.



γ) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Τα επόμενα δύο **ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ 3 και 4**, με 6 ισοδύναμες ερωτήσεις το καθένα, να απαντηθούν με τη μέθοδο των πολλαπλών επιλογών. Οι ορθές απαντήσεις να σημειωθούν στο τετράδιό σας, αναγράφοντας το γράμμα (α, β, γ, δ) που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση δίπλα στον αριθμό της ερώτησης ως εξής:

1.....α) ή β) ή γ) ή δ)

2..... α) ή β) ή γ) ή δ)

12..... α) ή β) ή γ) ή δ)

ΕΡΩΤΗΜΑ 3^ο:

1. Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} x^p dx$, $p \in \mathbb{R}$
- α) υπάρχει για $p > 1$
 - β) υπάρχει για $p \leq 1$
 - γ) υπάρχει για $p < -1$
 - δ) δεν υπάρχει για κανένα $p \in \mathbb{R}$

2. Ο συντελεστής συσχέτισης δύο μεταβλητών:
- α) εξαρτάται από τις μέσες τιμές των δύο μεταβλητών
 - β) εξαρτάται από τις διασπορές των δύο μεταβλητών
 - γ) δεν εξαρτάται ούτε από τις μέσες τιμές, ούτε από τις διασπορές των δύο μεταβλητών
 - δ) εξαρτάται από τις τυπικές αποκλίσεις των δύο μεταβλητών

3. Αν $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα του \mathbb{R}^3 , τότε η έκφραση $\underline{\alpha} \times (\underline{\beta} \times \underline{\gamma})$ είναι ίση με:
- α) $(\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta})\underline{\gamma} - (\underline{\alpha} \cdot \underline{\gamma})\underline{\beta}$
 - β) $(\underline{\alpha} \cdot \underline{\gamma})\underline{\beta} - (\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta})\underline{\gamma}$
 - γ) $(\underline{\beta} \cdot \underline{\gamma})\underline{\alpha} - (\underline{\beta} \cdot \underline{\alpha})\underline{\gamma}$
 - δ) $(\underline{\gamma} \cdot \underline{\alpha})\underline{\beta} - (\underline{\gamma} \cdot \underline{\beta})\underline{\alpha}$

Το σύμβολο \times δηλώνει εξωτερικό γινόμενο.

4. Αν $f(x) = \frac{3x-7}{x+1}$, $x \neq -1$, τότε η τιμή $f^{-1}(2)$ ισούται με:
- α) 21
 - β) $\frac{7}{3}$
 - γ) $\frac{3}{7}$
 - δ) 9

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (1 - 12x^5)^{21}(1 + x)^{10}$. Ο συντελεστής του όρου x^5 είναι:

- α) 0
- β) $\binom{10}{5}$
- γ) -24
- δ) 12

6. Ποια από τις παρακάτω τιμές του x δεν επιλύει την εξίσωση $\eta\mu x + \eta\mu 2x + \eta\mu 3x + \eta\mu 4x = 0$;

- α) $72^\circ n \quad n = 1, 2, \dots$
- β) $144^\circ n \quad n = 1, 2, \dots$
- γ) $90^\circ n \quad n = 1, 2, \dots$
- δ) $180^\circ n \quad n = 1, 2, \dots$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Με απόφαση της Κεντρικής Επιτροπής Διαγωνισμού η ερώτηση 6 δεν θα ληφθεί υπόψη στη βαθμολόγηση.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4^ο:

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g στο \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- α) δεν υπάρχει
- β) ισούται με 0
- γ) ισούται με 1
- δ) ισούται με 2

8. Στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ φέρνουμε μια εφαπτόμενη με κλίση 1 η οποία τέμνει τους άξονες x και

y στα σημεία **A** και **B**. Η απόσταση **AB** ισούται με:

- α) $\sqrt{13}$
- β) $2\sqrt{3}$
- γ) $3\sqrt{2}$
- δ) $\sqrt{26}$

9. Η ευθεία $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ εφάπτεται της υπερβολής $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ αν και μόνον αν:

- α) $A\alpha + B\beta = \Gamma$
- β) $A\alpha - B\beta = \Gamma$
- γ) $A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 = \Gamma^2$
- δ) $A^2\alpha^2 - B^2\beta^2 = \Gamma^2$

10. Ένα τρίγωνο έχει εμβαδόν E και το εμβαδόν του τριγώνου που δημιουργείται από τα μέσα των τριών πλευρών του αρχικού τριγώνου είναι E' . Η τιμή του λόγου E/E' είναι:

- α) 3
- β) 4
- γ) 2
- δ) 6

11. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 11 φορές. Η πιθανότητα να εμφανισθεί «κορώνα» ακριβώς 5 φορές είναι:

- α) $2^6 \cdot 2^{-11}$
- β) $\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2^9}$
- γ) $\frac{11!}{5! \cdot 6!} 2^{-11}$
- δ) $\binom{11}{6} 2^{-5}$

12. Δίνονται τα ακόλουθα σύνολα μιγαδικών αριθμών

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{1+2z}{1-z} \right| < 1 \right\}$$

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{1+z}{1-z} \right| < 1 \right\}$$

Ποιο από τα ακόλουθα είναι αληθές;

- α) $A = B$
- β) $A \subset B$
- γ) $A \supset B$
- δ) $A \cap B = \emptyset$