ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)
Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;
Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho>0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \le 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

Β2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, και

$$\left|\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(z_2)\right|=2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta=-4 \quad \text{και} \quad \gamma=5$$

Μονάδες 9

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_0, α_1, α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **Β1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0$$

τότε να αποδείξετε ότι: $|v|<4$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$ και
- $g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\quad x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x))=1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}\,x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x)=\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}\,dt,\quad x\in(1,+\infty)\ \text{ και }\ \alpha>1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)\,du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)\,du \qquad \text{(μονάδες 6)}$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\big(f(\alpha)-1\big)(x-\alpha),\quad x>1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 334-335
Α2. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 246
Α3. Θεωρία σελ. σχολ. Βιβλ. 222
Α4. Λ, Σ, Σ, Λ, Σ

ΘΕΜΑ Β

$(z-2)(\overline{z}-2)+|z-2|=2$

Β1..

$|z-2|^2+|z-2|-2=0$

Θέτω $y=|z-2|$ άρα $y^2+y-2=0 \overset{\Delta=9}{\Leftrightarrow} (y+2)(y-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2=0 \Leftrightarrow y=-2 \Leftrightarrow |z-2|=-2 \quad (1) \\ y-1=0 \Leftrightarrow y=1 \Leftrightarrow |z-2|=1 \quad (2) \end{cases}$

(1) : αδύνατη, (2) : κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$

$|z|=|z-2+2|\le|z-2|+2\le 1+2=3$ άρα $|z|\le 3$

Β2.

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ :</u>

$z_1+z_2=-\beta, \quad z_1\cdot z_2=\gamma$

Οι z_1, z_2 είναι συζυγείς άρα $z_2=\overline{z_1}$

$\left.\begin{matrix} z_1+\overline{z_1}=-\beta \\ z_1\cdot\overline{z_1}=\gamma \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2\operatorname{Re}(z_1)=-\beta \\ \operatorname{Re}^2(z_1)+\operatorname{Im}^2(z_1)=\gamma \end{matrix}\right\}(3)$

Επίσης $\operatorname{Im}(z_2)=-\operatorname{Im}(z_1)$ άρα $|\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |2\operatorname{Im}(z_1)|=2 \Leftrightarrow |\operatorname{Im}(z_1)|=1 \Leftrightarrow$

$\operatorname{Im}(z_1)=\pm 1$ Αν $\operatorname{Im}(z_1)=1$, τότε $\operatorname{Im}(z_2)=-1$, ενώ αν $\operatorname{Im}(z_1)=-1$, τότε $\operatorname{Im}(z_2)=1$.

Έστω $\operatorname{Im}(z_1)=1$ και έστω $z_1=\alpha+i$: $|z_1-2|=1 \Leftrightarrow |\alpha-i+2|=1 \Leftrightarrow |\alpha-2+i|=1 \Leftrightarrow$

$(\alpha-2)^2+1=1 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=2$

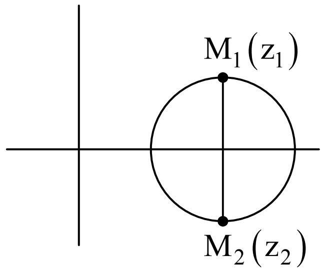
Από (3) έχουμε για $\operatorname{Re}(z_1)=\alpha=2$: $\begin{cases} 2\cdot 2=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4 \\ 2^2+1^2=\gamma \Leftrightarrow \gamma=5 \end{cases}$

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ :</u>

Οι z_1, z_2 είναι ρίζες του τριωνύμου άρα είναι συζυγείς με εικόνες συμμετρικές ως προς τον x΄x. Επομένως η απόσταση των εικόνων των z_1, z_2 θα είναι κάθετη στον x΄x. Επειδή είναι συζυγείς θα είναι : $\operatorname{Re}(z_1)=\operatorname{Re}(z_2)$ οπότε :

$|\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |z_1-z_2|=2$

Τα z_1, z_2 ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $K(2,0)$ και $\rho=1$ και η απόσταση των εικόνων τους είναι 2. Άρα τα z_1, z_2 είναι αντιδιαμετρικά σημεία. Οπότε $M_1(z_1)=(2,1)$ και $M_2(z_2)=(2,-1)$ δηλαδή $z_1=2+i$, $z_2=2-i$



Θα ισχύει :

$z_1+z_2=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$

$z_1 \cdot z_2=\gamma \Leftrightarrow \gamma=5$

Β3.

$\nu^3=-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0$

$\left|\nu^3\right| \le 3\left|\nu^2\right|+3|\nu|+3$

$|\nu|^3-1 \le 3|\nu|^2+3|\nu|+3-1<3\left(\left|\nu^2\right|+|\nu|+1\right)$

$\left(|\nu|-1\right)\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)<3\left(\left|\nu^2\right|+|\nu|+1\right)$

Επειδή το τριώνυμο x^2+x+1 είναι θετικό για κάθε $x \in R$, θα ισχύει : $|\nu|-1<3 \Leftrightarrow |\nu|<4$

ΘΕΜΑ Γ

$\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x$

$f(0)=1$

$g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1$

Γ1.

$\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x \Leftrightarrow 2\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=2x \Leftrightarrow \left[\left(f(x)+x\right)^2\right]'=\left[x^2\right]' \Leftrightarrow$

$\left(f(x)+x\right)^2=x^2+c$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1$ οπότε : $\left(f(0)+0\right)^2=0^2+c \Leftrightarrow c=1$ άρα $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1$

Έστω $h(x)=f(x)+x$

Έχουμε f παραγωγίσιμη στο R άρα f συνεχής στο R οπότε και h συνεχής στο R ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε $h^2(x)=x^2+1$ και $h(0)=f(0)+0=1$

$h(x)=0 \Leftrightarrow h^2(x)=0 \Leftrightarrow x^2+1=0$ αδύνατη

Άρα $h(x)\neq 0$ για κάθε $x \in R$

Επειδή $h(x)\neq 0$, $h(0)=1>0$ και h συνεχής στο R θα είναι $h(x)>0$ για κάθε $x \in R$

Δηλαδή $h(x)=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

Γ2.

Έχουμε : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ξέρουμε ότι $\sqrt{x^2+1}-x<\sqrt{x^2}-x\le |x|-x=\begin{cases} \xrightarrow{x\ge 0} & 0 \\ \xrightarrow{x<0} & -2x>0 \end{cases}$

Άρα $\sqrt{x^2+1}-x>0 \Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0$ δηλαδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in R$ οπότε f γνησίως φθίνουσα.

$f(g(x))=1 \Leftrightarrow f(g(x))=f(0)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R θα είναι και 1-1 οπότε

$g(x)=0$

$g'(x)=3x^2+3x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=-1$

	$-\infty$		-1		0	
g΄(x)		+	0	−	0	+
g(x)		↗		↘		↗
			Τ.Μ.		Τ.Ε.	
			$g(-1)=-\frac{1}{2}$		$g(0)=-1$	

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+\frac{3x^2}{2}-1\right)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+\frac{3x^2}{2}-1\right)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

- $x\in(-\infty,-1]$ η g είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty} g(x),g(-1)\right]=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$
- $x\in[-1,0]$ η g είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(A_2)=\left[g(0),g(-1)\right]=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$
- $x\in[0,+\infty)$ η g είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(A_3)=\left[g(0),\lim_{x\to+\infty} g(x)\right)=[-1,+\infty)$

Παρατηρούμε ότι : $0\notin g(A_1)$ και $g(A_2)$ ενώ $0\in g(A_3)$, οπότε υπάρχει ένα $x_1\in(0,+\infty)$ έτσι ώστε $g(x_1)=0$, το x_1 είναι μοναδικό διότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Άρα η εξίσωση έχει μια μοναδική ρίζα στο R και συγκεκριμένα στο $(0,+\infty)$.

Γ3.

Θέτω $\omega(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x-\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt$

Η ω είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών

$$\omega(0)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi 0-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt$$

Για $x<0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ θα έχουμε ότι $f(x)>f(0)=1$ άρα

$f(x)>0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)dx>0$ για $x\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$ οπότε $\omega(0)<0$

$\omega\left(\frac{\pi}{4}\right)=f(0)\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}-\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=1>0$

Τελικά $\omega(0)\cdot\omega\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in\left(0,\,\frac{\pi}{4}\right)$ έτσι ώστε $\omega(x_o)=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-5h)}{h}=0\Leftrightarrow\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]=0\quad(1)$

- $\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$

  Θέτω $u=-h$ τότε $\lim_{h\to 0}u=0$ έχω $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{-u}=f'(1)$

- $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}$

  Θέτω $y=5h$ τότε $\lim_{h\to 0}y=0$ και έχω:

  $\lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)-f(1)}{\frac{1}{5}y}=5\lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)-f(1)}{y}=5f'(1)$

  $(1)\Leftrightarrow 5f'(1)+f'(1)=0\Leftrightarrow 6f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$.

Άρα το $x_o=1$ είναι ρίζα της f' μοναδική διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Οπότε για $x>1\xrightarrow{f'\searrow}f'(x)>f'(1)=0\Leftrightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty]$

και για $x<1\xrightarrow{f'\searrow}f'(x)<f'(1)=0\Leftrightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$

Δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=1$

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ αφού είναι παραγωγίσιμη οπότε η συνάρτηση $\frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων για $x\in(1,+\infty)$. Συνεπώς η g είναι παραγωγίσιμη για $x\in(1,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$

Για $x>1$ έχουμε ότι $x-1>0$ και επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=1$ θα ισχύει $f(x)\ge f(1)=1$ δηλαδή $f(x)-1\ge 0$ άρα $g'(x)\ge 0$ και g γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=\int_{x+5}^{x+6} g(u)du$ για $x\in(1,+\infty)$ **(Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε** $h(x)=\int_{x}^{x+1} g(u)du$ **)** και έστω $\alpha>1$ τότε:

$$h(x)=\int_{x+5}^{\alpha} g(u)du+\int_{\alpha}^{x+6} g(u)du=-\int_{\alpha}^{x+5} g(u)du+\int_{\alpha}^{x+6} g(u)du$$

Η h παραγωγίσιμη αφού η g είναι συνεχής.

$h'(x)=-g(x+5)+g(x+6)$

Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε :

$x+5<x+6 \Leftrightarrow g(x+5)<g(x+6) \Leftrightarrow g(x+6)-g(x+5)<0$

άρα $h'(x)<0$ και h γνησίως φθίνουσα για $x\in(1,+\infty)$.

Λύνουμε την ανίσωση

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \Leftrightarrow h(8x^2)>h(2x^4) \xleftrightarrow{h\nearrow} 8x^2>2x^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^4-8x^2<0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2-4)<0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$$

και επειδή $x\in(1,+\infty)$ θα έχω $1<x<2$

Δ3. Ξέρουμε ότι $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ και επειδή f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ τότε η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$

$$g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-f(x)+1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}\left(f'(x)-\frac{f(x)-1}{x-1}\right)$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, x]$

Η f παραγωγίσιμη στο $(1, x)$

Οπότε από ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(1,x)$:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-1}{x-1}$$

άρα $g''(x)=\dfrac{1}{x-1}\left(f'(x)-f'(\xi)\right)$

Για $x>1 \Rightarrow x-1>0$ και f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε για $x>\xi \Rightarrow f'(x)>f'(\xi)$

Συνεπώς $g''(x)>0$ άρα g κυρτή για $x\in(1,+\infty)$.

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(\alpha)-1)(x-\alpha) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha) \Leftrightarrow$$

$g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow g(x)-0=g'(\alpha)\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow g(x)=g'(\alpha)\cdot(x-\alpha)+g(\alpha)$ (Εφαπτομένη της C_g στο $A(\alpha,0)$)

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την $x=\alpha$. Η λύση της εξίσωσης δίνει το σημείο τομής της C_g με την εφαπτομένη της στο σημείο $A(\alpha,0)$. Επειδή η g είναι κυρτή τότε η g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της εκτός από το σημείο $A(\alpha,0)$ άρα η $x=\alpha$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης.