

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**  
**ΕΠΑΛ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ****ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α****A1)** Σχολ. Βιβλίο – σελ. 138 – Ορισμός 2**A2)** α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ**A3) α)**  $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ **β)**  $\int_a^b \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_a^b = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$ **γ)**  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$ **ΘΕΜΑ Β****B1.**Έχουμε  $x \cdot f(x) - 2f(x) = x^2 - 4$ 

$$(x - 2)f(x) = x^2 - 4$$

για  $x \neq 2$ ,  $\frac{(x - 2) \cdot f(x)}{(x - 2)} = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ για } x \neq 2$$

**B2.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

**B3.**Η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής σε όλο το  $\mathbb{R}$ , άρα θα είναι συνεχής και στο  $x_0 = 2$ 

Θα ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 = f(2) \Leftrightarrow \boxed{f(2) = 4}$

**ΘΕΜΑ Γ**
**Γ1.**

A/A	Ηλικίες Υπαλλήλων	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων $v_i$ )	Κέντρο κλάσης $x_i$	$x_i v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
1 <sup>η</sup> κλάση	[25,35)	100	30	3000	50
2 <sup>η</sup> κλάση	[35,45)	50	40	2000	25
3 <sup>η</sup> κλάση	[45,55)	40	50	2000	20
4 <sup>η</sup> κλάση	[55,65)	10	60	600	5
<b>ΣΥΝΟΛΑ</b>		$v = 200$		7600	100

$$x_1 = \frac{25+35}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$x_2 = \frac{35+45}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

$$x_3 = \frac{45+55}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

$$x_4 = \frac{55+65}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

$$x_1 v_1 = 30 \cdot 100 = 3000$$

$$x_2 v_2 = 40 \cdot 50 = 2000$$

$$x_3 v_3 = 50 \cdot 40 = 2000$$

$$x_4 v_4 = 60 \cdot 10 = 600$$

$$f_1 \% = \frac{v_1}{v} \cdot 100\% = \frac{100}{200} \cdot 100\% = 50\%$$

$$f_2 \% = \frac{v_2}{v} \cdot 100\% = \frac{50}{200} \cdot 100\% = 25\%$$

$$f_3 \% = \frac{v_3}{v} \cdot 100\% = \frac{40}{200} \cdot 100\% = 20\%$$

$$f_4 \% = \frac{v_4}{v} \cdot 100\% = \frac{10}{200} \cdot 100\% = 5\%$$

**Γ2.**

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_i v_i}{v} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v} = \frac{3000 + 2000 + 2000 + 600}{200} = \frac{7600}{200} = 38$$

**Γ3.**

Το 25% των υπαλλήλων έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών

**Γ4.**

Από την 4<sup>η</sup> κλάση αποχωρούν πέντε (5) υπάλληλοι, άρα η καινούρια συχνότητα της 4<sup>ης</sup> κλάσης θα είναι  $v'_4 = v_4 - 5 = 10 - 5 \Rightarrow v'_4 = 5$

Από την 2<sup>η</sup> κλάση αποχωρούν πέντε (5) υπάλληλοι, άρα η καινούρια συχνότητα της 2<sup>ης</sup> κλάσης θα είναι  $v'_2 = v_2 - 5 = 50 - 5 \Rightarrow v'_2 = 45$

Στην 1<sup>η</sup> κλάση προσλαμβάνονται δέκα (10) υπάλληλοι, άρα η καινούρια συχνότητα της 1<sup>ης</sup> κλάσης θα είναι  $v'_1 = v_1 + 10 = 100 + 10 \Rightarrow v'_1 = 110$

Έχουμε τον πίνακα συχνοτήτων

A/A	Ηλικίες Υπαλλήλων	$x_i$	$v'_i$	$x_i v'_i$
1 <sup>η</sup> κλάση	[25,35)	30	110	3300
2 <sup>η</sup> κλάση	[35,45)	40	45	1800
3 <sup>η</sup> κλάση	[45,55)	50	40	2000
4 <sup>η</sup> κλάση	[55,65)	60	5	300
<b>ΣΥΝΟΛΑ</b>			$v = 200$	7400

$$v' = v'_1 + v'_2 + v'_3 + v'_4 = 110 + 45 + 40 + 5 = 200$$

$$\bar{x}' = \frac{x_1 v'_1 + x_2 v'_2 + x_3 v'_3 + x_4 v'_4}{v'} = \frac{3300 + 1800 + 2000 + 300}{200} = \frac{74000}{200} = 37$$

**ΘΕΜΑ Δ**
**Δ1.**

$$f(x) = e^x \cdot (x-1)$$

$$f'(x) = (e^x)' \cdot (x-1) + e^x \cdot (x-1)'$$

$$f'(x) = e^x (x-1) + e^x \cdot 1$$

$$f'(x) = x \cdot e^x - e^x + e^x$$

$$f'(x) = x \cdot e^x$$

Πρέπει να αποδείξουμε :  $f'(x) = f(x) + e^x$

$$x \cdot e^x = e^x (x-1) + e^x$$

$$x \cdot e^x = x \cdot e^x - e^x + e^x$$

$$x \cdot e^x = x \cdot e^x \quad \text{Ισχύει}$$

**Δ2.**

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^x$	+		+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Στο διάστημα  $(-\infty, 0]$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, στο διάστημα  $[0, +\infty)$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και στο  $x_0 = 0$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο (ολικό ελάχιστο) το  $f(0) = -1$

**Δ3.**

$$g(x) = f(x) + e^x$$

$$g(x) = e^x \cdot (x-1) + e^x$$

$$g(x) = x \cdot e^x - e^x + e^x$$

$$g(x) = x \cdot e^x$$

$$g(x) = f'(x)$$

Το εμβαδόν του χωρίου θα δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 |g(x)| dx = \int_{-1}^1 |f'(x)| dx = -\int_{-1}^0 f'(x) dx + \int_0^1 f'(x) dx = -[f(x)]_{-1}^0 + [f(x)]_0^1 = \\ &= -(f(0) - f(-1)) + f(1) - f(0) = -f(0) + f(-1) + f(1) - f(0) = -2f(0) + f(-1) + f(1) = \\ &= -2 \cdot (-1) + e^{-1}(-1-1) + e^1(1-1) = 2 + e^{-1} \cdot (-2) + e \cdot 0 = 2 - 2 \cdot \frac{1}{e} \Leftrightarrow E = \frac{2e-2}{e} \end{aligned}$$