ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 31.
Α2. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 22.
Α3. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλίου 87.
Α4. **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 3x-1=0 \\ \text{ή} \\ 8x^2-6x+1=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=\frac{1}{3} \text{ ή} \\ x=\frac{1}{2} \text{ ή} \\ x=\frac{1}{4} \end{matrix}$$

Ισχύει $A\cap B \subseteq A$ τότε $P(A\cap B)\le P(A)$

$A\subseteq A\cup B$ τότε $P(A)\le P(A\cup B)$

Άρα $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$

Επομένως $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

Β2.

$$P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-P\left[(A\cup B)'\right]=$$

$$1-P(A)-1+P(A\cup B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Ισχύει $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

Πραγματοποιείται το πολύ ένα , αντιστοιχεί στο $(A\cap B)'$

Άρα $P(\Delta)=P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Β3.

Πραγματοποιείται μόνο ένα, αντιστοιχεί στο $(A-B)\cup(B-A)$ άρα:

$$P(E)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=$$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Β4.

$9x^2 - 3x - 2 = 0$ με $x_1 = \frac{2}{3}$ και $x_2 = -\frac{1}{3}$ απορρίπτεται

Άρα $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$

Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β, Γ είναι ασυμβίβαστα τότε

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1$$

Αδύνατο διότι $P(B \cup \Gamma) \leq 1$. Άρα Β, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f_1\% = 10, \quad f_2\% = 30$

$\alpha_3 = 360 f_3 \Leftrightarrow 108 = 360 f_3 \Leftrightarrow f_3 = 0,3$. Άρα $f_3\% = 30$

Ισχύει $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100$

$$10 + f_2\% + 30 + f_4\% + 30 = 100 \Leftrightarrow$$

$$f_2\% + f_4\% = 30 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \quad (1)$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} xi\, fi = 9f_1 + 11f_2 + 13f_3 + 15f_4 + 17f_5 = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot 0,1 + 11f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15f_4 + 17 \cdot 0,3 = 14 \Leftrightarrow 11f2 + 15f_4 = 4,1 \quad (2)$$

$$\begin{matrix} f_2 + f_4 = 0,3 \\ 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} f_2 = 0,1 \\ f_4 = 0,2 \end{matrix} \text{ ή } \begin{matrix} f_2 = 10\% \\ f_4 = 20\% \end{matrix}$$

Γ2. $S^2 = \sum_{i=1}^{5} xi\, fi$, $\quad S^2 = 6,6$, $\quad S^2 = \sqrt{S^2} = \sqrt{6,6} = 2,57$

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f\%$
$[8,10)$	9	10	-5	25	2,5
$[10,12)$	11	10	-3	9	0,9
$[12,14)$	13	30	-1	1	0,3
$[14,16)$	15	20	1	1	0,2
$[16,18)$	17	30	3	9	2,7
Σύνολο		100			6,6

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2,57}{14} \Leftrightarrow CV = 0,18 > 0,1$$

Άρα το δείγμα <u>δεν</u> είναι ομοιογενές.

Γ3. Ισχύει $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} xivi + v_5 x_5}{v} = \dfrac{1780 + v_5 x_5}{v} = \dfrac{1780}{v} + \dfrac{v_5 x_5}{v} = \dfrac{1780}{v} + v_5 f_5 \Leftrightarrow$

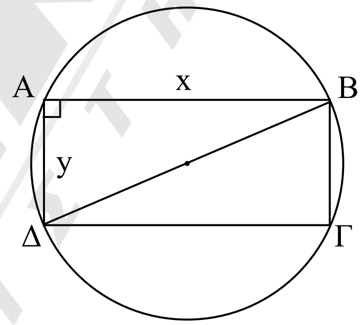
$$\Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{v} + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} = 8,9 \Leftrightarrow v = 200$$

Γ4. $\beta i = \dfrac{1}{S_\alpha}\alpha_i - \dfrac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha}$ τότε σύμφωνα με την εφαρμογή 3 σελ. 99 σχολ. βιβλίου ισχύει

$\bar{\beta} = \dfrac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha} - \dfrac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha} = \dfrac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} - \dfrac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} = 0$ και $S_\beta = \left|\dfrac{1}{S_\alpha}\right| S_\alpha = \dfrac{1}{S_\alpha} S_\alpha = 1$ όπου $S_\alpha > 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Επειδή $\hat{A} = 1L$ τότε ΔΒ διαγώνιος. Άρα από πυθαγόρειο θεώρημα

$x^2 + y^2 = (2R)^2 = 4 \cdot 25 = 100 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$ (1), $y > 0$

$E = AB \cdot A\Delta = x \cdot y \overset{(1)}{=} x \cdot \sqrt{100 - x^2}$ όπου $0 < x < 10$.

Άρα $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$ $\quad 0 < x < 10$

Δ2.

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}}(100 - x^2)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \frac{-\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$.

Αλλά $x > 0$, άρα $x = 5\sqrt{2}$.

	0 $\quad$ $5\sqrt{2}$	10
f′	+	−
f	↗	↘

Για $x = 5\sqrt{2}$ το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο τότε

$y^2 = 100 - x^2 = 100 - 50 = 50$ και $y = 5\sqrt{2} = x$. Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3. Επειδή $f(1) = 1\sqrt{100 - 1} = \sqrt{99}$ τότε το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{98x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{98} \cdot \frac{f(1+x) - f(1)}{x}\right] =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{98}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{1}{98}f'(1)=\frac{1}{98}\frac{98}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4. Ισχύει $0\le P(A)\le 1\Leftrightarrow 0\le P(A)^2\le 1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 100\ge 100-P(A)^2\ge 100-1\Leftrightarrow 10\ge\sqrt{100-P(A)^2}\ge\sqrt{99}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{10}\le\frac{1}{\sqrt{100-P(A)^2}}\le\frac{1}{\sqrt{99}}\Leftrightarrow\frac{1}{10}\le\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A)^2}}\le\frac{1}{\sqrt{99}}$$, διότι $0\le P(A-B)\le 1$

Άρα $0<\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A)^2}}<1$ όμοια $0<\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<1$

Όπου η συνάρτηση f στο διάστημα (0,1) είναι γνησίως αύξουσα.
Άρα

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)}\le P(A)\sqrt{100-P^2(A)}$$

$f(P(A-B)\le f(P(A)$ όπου f γνησίως αύξουσα

$P(A-B)\le P(A)$ το οποίο ισχύει διότι $A-B\subseteq A\Rightarrow P(A-B)\le P(A)$