

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .  
Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι  
η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Μονάδες 7**
- A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;
- Μονάδες 4**
- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και  
να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
- Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο  
τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη  
λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι  
λανθασμένη.
- α)** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$ .
- β)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$   
κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- γ)** Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  
 $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , είναι σταθερή στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$
- δ)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο  $y$  του  
συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μια λύση ως  
προς  $x$ .
- ε)** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια  
μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 7**

**B2.** Αν  $\alpha = 1$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 11**

**B3.** Για την παραπάνω τιμή του  $\alpha$ , να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της  $f''$ .

**Μονάδες 11**

**Γ3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει

- $f'(x) \cdot f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $[1, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = \sin x$  στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**